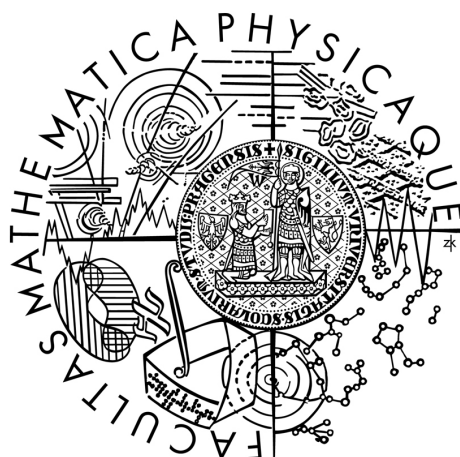


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁRSKÁ PRÁCA



Matúš Jambor

## Jednofaktorové modely úrokových sazeb

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Petr Myška

Študijný program: Matematika

Študijný odbor: Finančná matematika

Praha 2011

Na tomto mieste by som chcel poďakovať vedúcemu mojej práce  
RNDr. Petrovi Myškovi, za jeho pomoc, cenné rady, pripomienky a najmä za  
čas, ktorý mi venoval. Ďalej by som chcel poďakovať mojej rodine, ktorá ma  
podporuje v štúdiu.

Vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavrenie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa .....

Matúš Jambor

Název práce: Jednofaktorové modely úrokových sadzieb

Autor: Matúš Jambor

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Myška

Abstrakt: V práci študujeme modely úrokových sadzieb, ktoré sa uplatňujú v oblasti finančnej matematiky a aktuárskych vied. Existuje niekoľko modelov, ktoré sa snažia čo najvierohodnejšie popísať správanie výnosovej krivky, pričom vo väčšine prípadov využívajú aparát z teórie pravdepodobnosti a náhodných procesov. Tieto modely slúžia taktiež na ocenenie finančných derivátov, ktorých cena sa odvíja od pohybov úrokových sadzieb. Zaoberáme sa troma jednofaktorovými modelmi, ktoré bližšie predstavíme v druhej kapitole. V poslednej kapitole sa budeme venovať kalibrácii týchto modelov na reálne dáta.

Klíčová slova: jednofaktorové modely, úrokové sadzby, metóda maximálnej viero-  
hodnosti

Title: One factor interest rate models

Author: Matúš Jambor

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Myška

Abstract: In this thesis we looked closely at the models of interest rates that are applied in the area of financial mathematics and actuarial sciences. There are several models that try to describe the behavior of yield curve plausibly. In most of the cases the models stem from probability theory and coincidence. These models are also means for assessment of financial derivatives whose price depends on the interest rates movements. The work deals with three one-factor models which are analyzed into more details in the second chapter. The last chapter is about real-data calibration.

Keywords: one factor models, interest rates, maximum likelihood method

# Obsah

<b>1</b>	<b>Definície a poznámky</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Jednofaktorové modely</b>	<b>6</b>
2.1	Charakteristiky pohybov úrokových mier . . . . .	6
2.2	Delenie modelov . . . . .	7
2.3	Vašíčkov model . . . . .	8
2.3.1	Nevýhody modelu . . . . .	9
2.3.2	Ceny dlhopisov . . . . .	10
2.4	Hull-Whiteov model . . . . .	12
2.4.1	Ceny dlhopisov . . . . .	13
2.4.2	Ceny derivátov . . . . .	15
2.5	Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model . . . . .	16
2.5.1	Ceny dlhopisov . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Kalibrácia</b>	<b>19</b>
3.1	Dynamické metódy kalibrácie . . . . .	19
3.1.1	Kalibrácia Vašíčkovho modelu . . . . .	19
3.1.2	Kalibrácia CIR modelu . . . . .	21
3.2	Statické metódy kalibrácie . . . . .	23
3.2.1	Kalibrácia Hull-Whiteovho modelu . . . . .	23
	<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>27</b>

# Úvod

V posledných troch desaťročiach sa enormne rozvinul finančný trh, ktorý ponúka obrovské množstvo rozličných finančných derivátov, ktoré sú úzko späté s pohybmi úrokových mier. Na ocenenie týchto inštrumentov sa patrične podieľajú modely úrokových sadzieb, ktoré sa snažia popísať jej stochastický vývoj.

V tejto práci sa budeme zaoberať jednofaktorovými modelmi, v ktorých vystupuje len jediný zdroj neistoty, a to úroková sadzba. Čo je nevýhodou týchto modelov, pretože modelovaná teoretická výnosová krivka nedostatočne popisuje trhovú krivku.

Prvá kapitola obsahuje definície, ktorej cieľom je zoznámiť sa s potrebnou terminológiou. V druhej kapitole charakterizujeme jednofaktorové modely, popíšeme ich rozdelenie a bližšie sa budeme zaoberať Vašíčkovým, Hull-Whiteovým a CIR modelom, kde ku každému z nich odvodíme ceny dlhopisov. Posledná kapitola sa venuje kalibrácii týchto modelov, kde využitím odhadnutých parametrov z historických dát nasimulujeme predikcie pre rovnovážne modely. Parametre Hull-Whiteovho modelu odhadneme z aktuálnych trhových cien úrokových opcií.

# Kapitola 1

## Definície a poznámky

Modely úrokových sadzieb, ktoré tu budeme prezentovať, budú vyjadrené v spojitom čase. Finančné prostredie je založené na spojitom čase, pretože funkcie procesov spojitého času majú vhodné vlastnosti vrátane spojitosti a diferencovateľnosti. Mnoho funkciám to dovoľuje mať uzavretú formu riešenia bez použitia numerických metód. Nasledujúce definície môžeme nájsť v knihe [2].

**Definícia.** Diskontný faktor  $D(t, T)$  medzi dvoma časovými okamžikmi  $t$  a  $T$  je množstvo v čase  $t$ , ktoré je ekvivalentné 1 jednotke obeživa splatného v čase  $T$ , dané vzťahom

$$D(t, T) = e^{-\int_t^T r(s)ds}, \quad (1.1)$$

kde  $r(s)$  je kladná funkcia času.

Veľa oceňovacích aplikácií, ako napríklad známa Black-Scholesova formula, predpokladajú, že  $r$  je deterministická funkcia času. Zvyčajne je to motivované tým, že variabilita úrokových sadzieb prispieva k cene opcií menším rozsahom magnitúdy so zreteľom k podkladovým pohybom. Avšak pri produktoch úrokových mier v reálnom svete hlavná kolísavosť súvisí s pohybmi úrokových sadzieb. Preto je dôležité vynechať deterministickú štruktúru a začať modelovať vývoj  $r$  v čase cez stochastický proces (viď [2]).

**Definícia.** Splatnosť  $T$  dlhopisu s nulovým kupónom je kontrakt, ktorý garantuje jeho držiteľovi platbu 1 jednotky obeživa v čase  $T$  so žiadnymi platbami uprostred daného časového obdobia. Hodnota kontraktu v čase  $t < T$  je  $P(t, T)$ . Platí  $P(T, T) = 1$  pre všetky  $T$ .

Ak sadzby  $r$  sú deterministické, potom  $D(t, T)$  sú taktiež deterministické a nutne platí  $D(t, T) = P(t, T)$  pre každú dvojicu  $(t, T)$ . Ak  $r$  je stochastická premenná,  $D(t, T)$  je náhodná veličina v čase  $t$  závisiaca na budúcom vývoji sadzieb  $r$  medzi  $t$  a  $T$ . V tejto práci neskôr uvidíme, že cena dlhopisu  $P(t, T)$  a diskontný faktor  $D(t, T)$  sú úzko prepojené, v ktorom  $P(t, T)$  môže byť vyjadrená ako stredná hodnota náhodnej veličiny  $D(t, T)$  pod príslušnou pravdepodobnostnou mierou.

**Definícia.** *Spojito úročená spotová sadzba prevládajúca v čase  $t$  so splatnosťou  $T$  je označená ako  $R(t, T)$  a je to konštantná sadzba, pri ktorej investícia  $P(t, T)$  jednotiek obeživa v čase  $t$  vzrastie spojito do výnosu jednotky množstva so splatnosťou  $T$ .*

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} \quad (1.2)$$

Spojito úročená úroková miera je konštantnou sadzbou, pretože je konzistentná s cenou dlhopisu s nulovým kupónom a platí

$$e^{R(t, T)(T-t)} P(t, T) = 1,$$

z čoho môžeme získať cenu dlhopisu vyjadrenú prostredníctvom spojito úročenej spotovej sadzby  $R$

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Závislosť  $R(t, T)$  od doby splatnosti  $T$  nám udáva výnosová krivka a závislosť výnosovej krivky od doby do splatnosti  $T - t$  nám určuje časovú štruktúru úrokových mier.

Začiatok časovej štruktúry označujeme pojmom okamžitá úroková sadzba, čo je vlastne úrok na nekonečne krátku dobu. Označujeme ho  $r(t)$  a je definovaný ako

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t).$$

Teória modelovania úrokových mier bola založená na predpoklade špecifickej 1-rozmernej dynamickej premennej pre okamžitú spotovú sadzbu  $r$ . Modelovanie takejto dynamickej štruktúry je veľmi vhodné pokiaľ všetky fundamentálne veličiny (sadzby a dlhopisy) sú dobre definované podľa bez-arbitrážnych argumentov ako očakávanie funkčného procesu  $r$ , opäť referencia na [2]. Existencia rizikovo neutrálnej miery implikuje, že voľno-arbitrážna cena v čase  $t$  prípadnej požiadavky s výplatou  $H_t$  v čase  $T$  je daná vzťahom

$$H_t = E_t \{ e^{-\int_t^T r(s) ds} H_T \},$$

kde  $E_t$  označuje časovo  $t$ -podmienené očakávanie za predpokladu rizikovo neutrálnej miery. Cena dlhopisu s nulovým kupónom v čase  $t$  so splatnosťou  $T$  je charakterizovaná jednotkou množstva obeživa dostupného v čase  $T$ , takže  $H_T = 1$  a získame

$$P(t, T) = E_t \{ e^{-\int_t^T r(s) ds} \}.$$

Táto formula ukazuje, že cena dlhopisu je diskontovaná hodnota cez každý okamžik od času  $t$  až do splatnosti  $T$ .

Pod pojmom arbitráž na finančnom trhu rozumieme nákup a následný predaj určitého aktíva za účelom nadobudnutia zisku využitím cenových rozdielov identických alebo podobných finančných inštrumentov na rozličných trhoch.

Arbitráž nastane ak je splnená aspoň jedna z troch podmienok:

1. S rovnakým aktívom sa neobchoduje za rovnakú cenu na všetkých trhoch.



2. S dvoma aktívami s totožnými peňažnými tokmi sa neobchoduje za rovnakú cenu.
3. S aktívom so známou cenou v budúcnosti sa dnes neobchoduje za jeho budúcu cenu diskontovanú pri bezrizikovej úrokovej sadzbe.

Okrem modelov, ktoré používajú okamžitú úrokovú sadzbu, existujú také, v ktorých sa pracuje s forwardovou sadzbou. Tieto modely slúžia na oceňovanie forwardov, ktoré patria k dôležitým finančným derivátom.

Okamžitá úroková sadzba reprezentuje úrokovú sadzbu dostupnú v súčasnosti pre investíciu vykonanú v budúcnosti. Je implicitne definovaná rozdielom cien dlhopisu, ktorá odzrkadľuje očakávanú okamžitú úrokovú sadzbu  $T - t$  periód v budúcnosti

$$\frac{P(t, t + \Delta t)}{P(t, T)} = e^{-f(t, T)\Delta t}.$$

Preskúpaním a integrovaním môžeme získať cenu dlhopisu prostredníctvom okamžitej forwardovej sadzby:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}. \quad (1.3)$$

# Kapitola 2

## Jednofaktorové modely

V roku 1977 prišiel Vašíček s nápadom, ktorý bol založený na definovaní okamžitej úrokovej sadzby pomocou reálnej miery, ktorý publikoval v článku [10]. Jeho odvodenie voľno-arbitrážnej ceny pre deriváty vychádzalo z Black-Scholesových tvrdení. Konštrukcia vhodného bezrizikového portfólia ako v Black-Scholesovom modeli, viedla k vzniku stochastického procesu, ktorý závisel len na súčasnom čase a okamžitej úrokovej sadzbe a nie na splatnostiach tvoriacich portfólio.

Modelovanie zmien okamžitých úrokových sadzieb prostredníctvom jednofaktorových modelov popisuje stochastická diferenciálna rovnica

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t).$$

Porozumieť zmenám úrokových mier, zvažujú jednotlivo dva výrazy na pravej strane rovnice. Prvý termín reprezentuje predpovedateľnú, deterministickú časť zmeny úrokovej sadzby. Takže,  $\mu(t, r(t))$  je očakávaná zmena v úrokovej sadzbe a nazýva sa drift. Druhý termín  $\sigma(t, r(t))$  reprezentuje nestálosť v úrokových zmenách, nazývame ho volatilita. Náhodnosť je v rovnici reprezentovaná *Wienerovým procesom*  $W(t)$ .

**Definícia.** *Wienerov proces  $\{W(t), t \geq 0\}$  je  $t$ -parametrický systém náhodných veličín, pre ktorý platí:*

- $W(0) = 0$
- $W(t_2) - W(t_1)$  má normálne rozdelenie  $N(0, t_2 - t_1)$  pre každé  $t_2 > t_1$ , čo znamená, že stredná hodnota prírastkov je nulová  $E(dW) = 0$  a  $\text{Var}(dW) = t_2 - t_1 = dt$
- prírastky  $dW$  sú navzájom nekorelované v čase

### 2.1 Charakteristiky pohybov úrokových mier

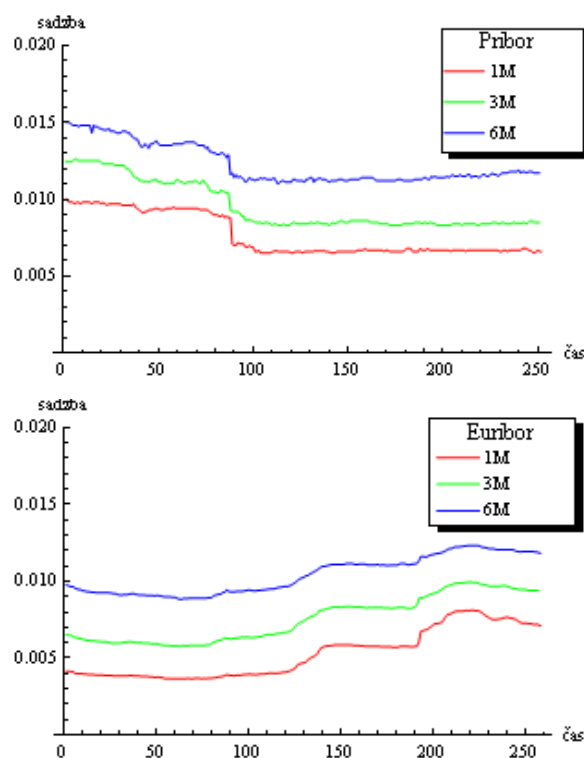
Predtým než predstavíme niektoré konkrétne modely úrokových sadzieb, spomenieme niektoré všeobecné vlastnosti pohybov úrokových mier.

1. Volatilita výnosov rôznych splatností sa líši. Dlhodobé sadzby nekolíšu, tak ako krátkodobé.

2. Úrokové sadzby sa vracajú k určitej strednej hodnote. Vzrast úrokovej sadzby má sklon k nasledujúcemu poklesu alebo obrátene, ak sadzby klesajú, majú tendenciu vzrásť.
3. Sadzby rôznych splatností sú kladne korelované. Sadzby splatností, ktoré sú bližšie k sebe majú väčšiu koreláciu ako splatnosti, ktoré sú ďalej od seba.
4. Úrokové sadzby by nemali byť negatívne.

Žiaden známy model nezachytáva všetky spomínané vlastnosti. Preto jedným z prvých krokov pri vyberaní modelu úrokovej sadzby je porozumieť, ktoré tieto charakteristiky najlepšie vystihujú náš finančný derivát.

Pre ilustráciu vidíme na nasledujúcich grafoch vývoj troch úrokových sadzieb pre český a európsky trh za rok 2010.



Obr. 2.1: Vývoj úrokových sadzieb pre PRIBOR a EURIBOR za rok 2010

## 2.2 Delenie modelov

Najzákladnejším delením modelov úrokových sadzieb je rozdelenie na jednofaktorové a mnohofaktorové modely. V tejto práci sa budeme zaoberať výlučne jednofaktorovými modelmi. Ide o modely, ktoré pracujú len s jedným zdrojom neistoty, ktorým je Wienerov proces.

Ďalšie rozdelenie modelov úrokových mier je na tie, ktoré sú odvodené z rovnovážnych modelov ekonómie a na tie, ktoré sú založené na arbitrážnych argumentoch. Rovnovážne alebo skôr endogénne modely sú založené na predpokladoch, že ceny

dlhopisov a výnosy sú určené trhovým ocenením vývoja krátkodobých úrokových sadzieb. Endogénne modely nezohľadňujú aktuálnu výnosovú krivku, ekvivalentne to platí aj pre forwardovú krivku [5]. Najbežnejší tvar týchto modelov je popísaný rovnicou zmien okamžitej úrokovej sadzby

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t), \quad (2.1)$$

kde  $r(t)$  je aktuálna hodnota okamžitej úrokovej sadzby,  $\kappa$  je rýchlosť vrátenia sa (mean reversion),  $\theta$  je sadzba, do ktorej sa  $r$  vracia,  $\sigma$  je volatilita,  $\gamma$  je exponent, ktorým je umocnená úroková sadzba,  $W$  je Wienerov proces.

Podľa Vašíčka [10] prvá dôležitá vlastnosť tohto modelu je vracanie sa okamžitej úrokovej sadzby k nejakému dlhodobému priemeru. Táto vlastnosť sa odvoláva na domnienku, že ak sadzby budú veľmi vysoké alebo veľmi nízke, vrátia sa späť do „normálnych“ úrovní. Rýchlosť vrátenia je určená parametrom  $\kappa \leq 1$ . Tento parameter má vplyv na tvar výnosovej krivky. Ak  $\kappa$  je veľké, výnosová krivka rýchlo smeruje k dlhodobej výnosovej sadzbe. Ak  $\kappa$  je nízke, tak jej tendencia blížiti sa k nej je pomalá.

Rozdiel medzi niektorými rovnovážnymi modelmi ako napríklad Vašíčkovým, CIR a Dothanovým modelom je v parametri  $\gamma$ . Vo Vašíčkovom modeli je rovný 0, v CIR je to 1/2 a v Dothanovom je rovný 1. Základnou otázkou rozlíšenia modelov je, či termín volatility v stochastickej rovnici zmeny úrokovej sadzby je úmerný hladine sadzby. To následne určuje parameter  $\gamma$ . Empirickými odhadmi tohto exponentu sa zistilo, že volatilita  $\sigma(t, r(t))$  je výrazne spojená s hladinou okamžitej úrokovej sadzby (viď [2]). Ak sú sadzby nízke, volatilita je zveličená, ak sú sadzby vysoké, volatilita je zmiernená.

Endogénne modely sú kritizované, pretože nefitujú dobre výnosovú krivku. Zatiaľ čo je opodstatnená kritika pre modely používané na ohodnotenie finančných aktív pre obchodné účely, nemusí to byť problém, keď sú modely používané pre dlhodobé finančné modelovanie.

Bez-arbitrážne alebo exogénne modely využívajú pôvodnú výnosovú krivku ako vstup do modelu, ktorá tak presne vystihuje tvar súčasnej výnosovej krivky. Heath, Jarrow a Morton zovšeobecnilí bez-arbitrážnu štruktúru modelovaním forwardových sadzieb získaných zo súčasnej výnosovej krivky. [4]

V nasledujúcich podkapitolách budeme prezentovať jednotlivé jednofaktorové modely úrokových sadzieb, ktoré podrobnejšie popíšeme.

## 2.3 Vašíčkov model

Tento model bol prvýkrát popísaný v článku [10]. Vašíček využil mean-reverting stochastický proces na modelovanie vývoja krátkodobej úrokovej miery. Mean reversion je jedným z kľúčových vylepšení modelu a táto vlastnosť je v súlade s ekonomickými argumentmi. Vysoké úrokové sadzby majú tendenciu zapríčiniť spomalenie ekonomiky, dlžníci požadujú menej peňažných prostriedkov. To zapríčiňuje, že sadzby klesajú k rovnovážnemu dlhodobému priemeru. V opačnej

situácii, keď sadzby sú nízke, je zvýšený dopyt po peniazoch, tak sadzby majú sklon vzrásť znova k dlhodobému priemeru.

Model predpokladá, že súčasná krátkodobá úroková sadzba je známa a nasledujúce hodnoty vychádzajú z tejto stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad (2.2)$$

kde  $r(t)$  je spojitá funkcia času a vychádza z Markovského procesu, čo znamená, že nemá žiadnu pamäť. Budúce vývoje úrokovej sadzby nie sú závislé na minulých pohyboch. Pretože ide o spojitý Markovský proces, nazýva sa difúzny proces. V parametri  $\theta$  je označený dlhodobý priemer okamžitej úrokovej sadzby  $r$ . V niektorých rozšírenejších modeloch tento priemer nie je konštanta, ale funkcia času.  $\kappa$  je rýchlosť vyrovňovania. Ak  $r > \theta$  potom koeficient  $\kappa > 0$  robí driftový výraz negatívnym, a teda sadzba bude priťahovaná späť k hodnote  $\theta$ . Opačný prípad nastane, keď  $r < \theta$ . Pretože berieme do úvahy len jeden faktor, všetky sadzby sú závislé na okamžitej úrokovej sadzbe  $r$ . Symbol  $\sigma$  je absolútna volatilita a  $W(t)$  označuje Wienerov proces, ktorý sme definovali vyššie.

Vašíčkov model predpokladá, že zmeny v úrokových sadzbách sú normálne rozdelené, spôsobené zahrnutím Wienerovho procesu (viď [10]). Z predpokladu normality vyplýva, že ceny dlhopisov majú lognormálne rozdelenie. Ďalšou vlastnosťou tohto modelu je, že všetky ceny dlhopisov sa týkajú rovnakého faktoru, okamžitej úrokovej sadzby. Dôsledkom čoho je, že všetky pohyby cien dlhopisov sú odvodené z pohybov okamžitej úrokovej sadzby. Čo implikuje, že ceny dlhopisov so všetkými splatnosťami sú perfektne korelované.

### 2.3.1 Nevýhody modelu

Musíme pripomenúť, že tento jednofaktorový model je taktiež vystavovaný kritike. Závislosť na jednom faktore značne obmedzuje tvary výnosovej krivky a často vedie k situáciám, kde teoretická výnosová krivka nekorešponduje s tržnou výnosovou krivkou. V skutočnosti tento jav nastáva takmer vždy, čo je najväčším problémom tohto modelu. [2]

Ďalším problémom Vašíčkovho modelu je, že môže produkovať záporné sadzby, čo vyplýva z normality zmien úrokových sadzieb. Pri reálnych úrokových sadzbách to nie je taký problém, ale pri nominálnych je nepravdepodobné, že budú záporné.

Najväčšou nevýhodou je, že neprešiel mnohými empirickými štúdiami. Objavili sa chyby pri fitovaní dát. Mnohofaktorové verzie modelov dávali oveľa lepšie výsledky (viď [1]). Napriek tomu je Vašíčkov model veľmi užitočný a široko používaný v praxi kvôli svojej tvárnosti a poskytuje uzavretú formu riešenia pre mnohé finančné inštrumenty.

### 2.3.2 Ceny dlhopisov

V tejto sekcii sme odvodili ceny dlhopisov na základe článku [6], v ktorom nami vybratá metóda je detailnejšie popísaná a zároveň sú odvodené ďalšie metódy. Vašíčková práca je prvou, ktorá zahŕňa stochastickú úrokovú mieru pri oceňovaní dlhopisov. Okamžitá úroková sadzba je modelovaná ako difúzny proces s konštantnými parametrami. Ak je cena dlhopisu založená na tomto predpoklade, má vlastnosť, že v daný dátum pomer očakávaného výnosu na jednotku volatility je rovnaký bez ohľadu na splatnosť dlhopisu. Vašíčkov model je špeciálnou verziou *Ornstein-Uhlenbeckovho procesu* s konštantnou volatilitou, pretože krátkodobá úroková sadzba je normálne rozdelená a Markovská. Z ceny dlhopisu môže byť skonštruovaná celá výnosová krivka v určitý časový okamžik.

Poddajnosť Vašíčkovho modelu a jeho zaujímavé stochastické vlastnosti robia tento klasický model veľmi populárnym. V nasledujúcej časti posúdime stochastické vlastnosti krátkodobej sadzby podstatnej k odvodeniu ceny dlhopisu, ktorú získame z dôsledkov pravdepodobnostného rozdelenia úrokových sadzieb.

V modelovaní nestálosti úrokových sadzieb predpokladáme, že základom je pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  so štandardnou filtráciou  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Podľa rizikovo neutrálnej miery  $P$  sú premenné okamžitej úrokovej sadzby dané rovnicou (2.2), kde  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  sú kladné konštanty.

Požitím Itôvej formuly môžeme overiť, že rovnica

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-\kappa t} \left[ r(0) + \int_0^t \kappa \theta e^{\kappa u} du + \sigma \int_0^t e^{\kappa u} dW(u) \right] \\ &= \underbrace{r(0)e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})}_{\mu(t)} + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW(u) \end{aligned}$$

je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice (2.2), kde  $\mu(t)$  je deterministická funkcia. Vidíme, že  $r(t)$  je normálne rozdelená náhodná veličina, pre ktorú platí  $E[r(t)] = \mu(t)$ .

Túto strednú hodnotu môžeme získať bez explicitného riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice. Vezmime zintegrovaný tvar rovnice (2.2), dostaneme

$$r(t) = r(0) + \int_0^t (\kappa(\theta - r(u))du + \sigma dW(u)).$$

Odtiaľ máme

$$\mu(t) := E[r(t)] = r(0) + \int_0^t \kappa(\theta - E[r(u)])du. \quad (2.3)$$

Z (2.3) máme

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \kappa(\theta - \mu(t)),$$

čo je obyčajná diferenciálna rovnica. Teda použitím integračného faktoru  $e^{\kappa t}$

$$E[r(t)] = e^{-\kappa t} [r(0) + \theta(e^{\kappa t} - 1)] = \mu(t). \quad (2.4)$$

Podobne definujeme

$$\begin{aligned}
\sigma^2(t) : &= \text{Var}[r(t)] = \mathbb{E} \left[ \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW(u) \right]^2 \\
&= \sigma^2 e^{-2\kappa t} \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{2\kappa u} du \right] \quad \text{podľa Itôvej izometrie} \\
&= \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Takže,  $r(t) \sim N(\mu(t), \sigma^2(t))$  so strednou hodnotou a rozptylom spočítaných v (2.4) a (2.5).

Použitím rizikovo neutrálnej oceňovacej štruktúry, cena dlhopisu s nulovým kupónom so splatnosťou  $T$  v čase  $t$  je

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \tag{2.6}$$

Označme

$$X(s) = r(s) - \theta. \tag{2.7}$$

Kde  $X(s)$  je riešením Ornstein-Uhlenbeckovej rovnice

$$dX(t) = -\kappa X(t) + \sigma dW(t)$$

s podmienkou  $X(0) = r(0) - \theta$ . Požitím Itôvej formule je proces  $X(s)$  daný rovnicou

$$X(s) = e^{-\kappa s} \left( X(0) + \int_0^s \sigma e^{\kappa u} dW(u) \right) \tag{2.8}$$

$X(s)$  má normálne rozdelenie, potom aj  $\int_0^t X(s) ds$  má normálne rozdelenie. Aplikovaním strednej hodnoty na rovnicu (2.8) dostaneme

$$\mathbb{E}[X(s)] = X(0)e^{-\kappa s}.$$

Takže zintegrovaním pravej strany rovnice získame

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t X(s) ds \right] = X(0) \frac{(1 - e^{-\kappa t})}{\kappa}. \tag{2.9}$$

Obdobne

$$\text{Var} \left[ \int_0^t X(s) ds \right] = \frac{\sigma^2}{2\kappa^3} (4e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t} + 2\kappa t - 3), \tag{2.10}$$

čo vypočítame rozpísaním kovariancie. Z rovnice (2.7) dostaneme

$$\mathbb{E} \left[ - \int_0^t r(s) ds \right] = \mathbb{E} \left[ - \int_0^t (X(s) + \theta) ds \right]. \tag{2.11}$$

Z predchádzajúcej rovnice a rovnice (2.9) obdržíme

$$\mathbb{E} \left[ - \int_t^T r(s) ds \right] = - \frac{(r(t) - \theta)}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) - \theta(T-t). \tag{2.12}$$

Podobne dostaneme použitím (2.10)

$$\begin{aligned}\text{Var}\left[-\int_t^T r(s)ds\right] &= \text{Var}\left[-\int_t^T (X(s) + \theta)ds\right] = \text{Var}\left[\int_t^T X(s)ds\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa^3}(4e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)} + 2\kappa(T-t) - 3) \quad (2.13)\end{aligned}$$

Pre cenu dlhopisu definovanú v (2.6) platí, že je rovná

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\middle| r_t\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s(r_t)ds\right)\right] =: P(t, T, r_t),$$

kde  $r_s$  je funkciou  $r_t$ .

Použitím výsledkov (2.12) a (2.13) je cena dlhopisu daná vzťahom

$$\begin{aligned}P(t, T, r_t) &= \exp\left(\mathbb{E}\left[-\int_t^T r_s(r_t)ds\right] + \frac{1}{2}\text{Var}\left[-\int_t^T r_s(r_t)ds\right]\right) \\ &=: \exp\left(A(t, T) - B(t, T)r(t)\right), \quad (2.14)\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}B(t, T) &= \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}), \\ A(t, T) &= \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)[B(t, T) - (T-t)] - \frac{\sigma^2}{4\kappa}B(t, T)^2.\end{aligned}$$

Rovnica (2.14) sa nazýva afinná exponenciálna cena dlhopisu.

## 2.4 Hull-Whiteov model

Tento model patrí k jedným z exogénnych modelov, ktorý je navrhnutý tak, aby bol konzistentný s pozorovanou výnosovou krivkou alebo cenou dlhopisu. Hull a White vylepšili Vašíčkov model tak, že dlhodobý rovnovážny priemer  $\theta$  už nie je konštanta ale funkcia času  $\theta(t)$ , odkaz na knihu [2]. Podľa závislosti driftového koeficientu na čase môžeme rozlíšiť, či ide o endogénny model, ktorý nie je zvyčajne funkciou času, alebo exogénny, ktorý poväčšine závisí na čase. Proces okamžitej úrokovej sadzby sa vyvíja za predpokladu rizikovo-neutrálnej miery nasledovne:

$$dr(t) = (\theta(t) - \kappa r(t))dt + \sigma dW(t), \quad (2.15)$$

kde  $\kappa$  a  $\sigma$  sú konštanty a  $\theta(t)$  je deterministická funkcia času. Parameter  $\theta(t)$  je vybraný tak, aby fitoval teoretické ceny dlhopisov z výnosovej krivky pozorovanej na trhu. Parameter  $\sigma$  určuje celkovú hladinu volatility. Vyrovňavací parameter  $\kappa$  určuje relatívne volatility dlhodobých a krátkodobých sadzieb. Vysoká hodnota  $\kappa$  zapríčiňuje, že okamžitá úroková sadzba sa pohybuje k ustáleniu rýchlejšie, takže dlhodobá volatilita je znižovaná.

Rozdelenie sadzieb je tiež normálne, takže tak isto ako pri Vašíčkovom modeli, ani tu nemôžeme vylúčiť existenciu záporných sadzieb. Avšak pri vhodne



zvolených hodnotách parametrov je výskyt záporných sadziieb oveľa menší ako pri Vašíčkovom modeli.

Hull-Whiteov model zaraďujeme k modelom úrokových sadziieb s afinnou časovou štruktúrou, takže cena dlhopisu s nulovým kupónom má tvar ako rovnica (2.14).

### 2.4.1 Ceny dlhopisov

Chceme model nakalibrovať na dnešné dáta na trhu tak, aby súčasné modelované ceny dlhopisov s nulovým kupónom  $P(0, T)$  pre všetky splatnosti  $T$ , boli rovnaké ako pozorované ceny na trhu. To môžeme docieľiť vhodným výberom funkcie  $\theta(t)$  tak, aby sa počiatočná výnosová krivka zhodovala s modelovanými cenami. Tieto hodnoty budeme reprezentovať pomocou trhovej okamžitej forwardovej sadzby  $f^M(0, T)$  v čase 0 pre čas  $T$  na nekonečne krátky časový okamžik, ktorá je definovaná ako

$$f^M(0, T) \equiv -\frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T} = -\frac{\partial A(0, T)}{\partial T} - \frac{\partial B(0, T)}{\partial T} r(0) \quad (2.16)$$

Odvodenie nasledujúcich vzťahov nájdeme v práci [7]. Dosadením rovnice ceny dlhopisu (2.14) do Black-Scholes-Mertonovej parciálnej diferenciálnej rovnice spočítame explicitné vzorce pre funkcie  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$ . Dostaneme takúto sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} + B(t, T)\theta(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 B(t, T)^2 = 0 \quad (2.17)$$

$$A(T, T) = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} - \kappa B(t, T) - 1 = 0 \quad (2.19)$$

$$B(T, T) = 0 \quad (2.20)$$

Vyriešením diferenciálnej rovnice (2.19) s okrajovou podmienkou (2.20) dostaneme riešenie pre  $B(t, T)$

$$B(t, T) = \frac{1}{\kappa} \left( e^{-\kappa(T-t)} - 1 \right), \quad (2.21)$$

pre ktoré platí

$$\frac{\partial}{\partial T} B(t, T) = -e^{-\kappa(T-t)}. \quad (2.22)$$

V rovnici (2.17) funkcia  $A(t, T)$  závisí na  $B(t, T)$  a jej integráciou medzi časovými okamžikmi  $t$  a  $T$  dostaneme

$$\int_t^T \frac{\partial A(u, T)}{\partial t} du = A(T, T) - A(t, T)$$

z čoho máme

$$A(t, T) = \int_t^T B(u, T)\theta(u)du + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T B(u, T)^2 du. \quad (2.23)$$

Použitím Leibnizovho integračného pravidla na predchádzajúcu rovnicu obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}A(0, T) &= \underbrace{B(T, T)\theta(T)}_{=0} + \int_0^T B(u, T)\theta(u)du \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 B(T, T)^2}_{=0} + \sigma^2 \int_0^T B(u, T)\frac{\partial B(u, T)}{\partial T}du\end{aligned}$$

Tento vzťah ďalej zjednodušíme použitím (2.21) a (2.22)

$$\frac{\partial}{\partial T}A(0, T) = - \int_0^T e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{2}(1 - e^{2\kappa T}) - (1 - e^{\kappa T}) \right]$$

Dosadením tohto vzťahu do (2.16) dostaneme

$$f^M(0, T) = \int_0^T e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du + \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{2}(1 - e^{2\kappa T}) - (1 - e^{\kappa T}) \right] + e^{-\kappa T}r(0)$$

Snažíme sa vyjadriť  $\theta(T)$ . Na prvý sčítanec v predchádzajúcom vzťahu aplikujeme Leibnizove integračné pravidlo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^M(0, T)}{\partial T} &= \theta(T) - \kappa \int_0^T e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du + \frac{\sigma^2}{\kappa}(e^{-2\kappa T} - e^{-\kappa T}) - \kappa e^{-\kappa T}r(0) \\ &= \theta(T) - \kappa f^M(0, T) - \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa T})\end{aligned}$$

Takže

$$\theta(T) = \frac{\partial f^M(0, T)}{\partial T} + \kappa f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa T}) \quad (2.24)$$

Chceme nájsť vyjadrenie  $A(t, T)$ , k čomu nám posluží rovnica (2.23), v ktorej druhý integrál ľahko spočítame a z vyjadrenia  $\theta(T)$  v rovnici (2.24) a následnými úpravami spočítame prvý integrál. Dopracujeme sa k výsledku

$$A(t, T) = -f^M(0, T)B(t, T) + \underbrace{\ln \left( \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right)}_{\text{ozn. X}} + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(e^{-2\kappa t} - 1)B(t, T)^2,$$

kde X je  $-\int_t^T f(0, u)du$ , pričom sme využili (1.3).

Podobne ako vo Vašíčkovom modeli za predpokladu pravdepodobnostného priestoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  so štandardnou filtráciou  $\{\mathcal{F}_t\}$  vyriešime stochastickú diferenciálnu rovnicu (2.15) použitím Itôvej formuly. V tomto prípade odvodíme  $r(T)$  v závislosti na  $r(t)$  kvôli analógii použitia výsledkov z predchádzajúcej časti:

$$r(T) = e^{-\kappa(T-t)}r(t) + \int_t^T e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du + \sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-u)}dW(u).$$

Vieme, že  $r(T)$  má normálne rozdelenie so strednou hodnotou a rozptylom:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r(T)] &= e^{-\kappa(T-t)}r(t) + \int_t^T e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du \\ \text{Var}[r(T)] &= \mathbb{E} \left[ \left( r(T) - \mathbb{E}[r(T)] \right)^2 \right] = \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right)\end{aligned} \quad (2.25)$$

Integrál v (2.26) spočítame pomocou (2.22) a použitím Leibnizovho integračného pravidla

$$\int_t^T e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du = -\frac{\partial}{\partial T} \int_t^T B(u, T)\theta(u)du.$$

Spočítaním tohto integrálu a substitovaním dostaneme

$$\int_t^T e^{-\kappa(T-u)}\theta(u)du = \alpha(T) - \alpha(t)e^{-\kappa(T-t)},$$

kde

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t})^2.$$

Takže stredná hodnota okamžitej úrokovej sadzby  $r$  v čase  $T$  je

$$E[r(T)] = e^{-\kappa(T-t)}r(t) + \alpha(T) - \alpha(t)e^{-\kappa(T-t)}.$$

## 2.4.2 Ceny derivátov

V tejto sekcii ukážeme ceny niektorých úrokových derivátov odvodených z Hull-Whiteovho modelu, ktoré neskôr použijeme pri kalibrácii. Námet čerpáme z knihy [4].

Vieme, že cena európskej put opcie  $\mathbf{ZBP}(t, T, S, K)$  v čase  $t$  so splatnosťou  $T$  na dlhopis s nulovým kupónom a realizačnou cenou (strike)  $K$  je

$$\mathbf{ZBP}(t, T, S, K) = KP(t, T)\Phi(\sigma_p - h) - P(t, S)\Phi(-h), \quad (2.26)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}} B(T, S), \\ h &= \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P(t, S)}{P(t, T)K} + \frac{\sigma_p}{2} \end{aligned}$$

a  $\Phi(\cdot)$  je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia.

Z tejto ceny put opcie na dlhopis môžeme odvodiť cenu úrokovej call opcie (capu). Úrokovú put opciu, nazývanú floor, môžeme získať obdobným spôsobom z vyjadrenia ceny call opcie na dlhopis. Cap je úrokový derivát, ktorý chráni držiteľa pred nárastom krátkodobých úrokových sadzieb tým, že mu vypláca v dohodnutom období určitú čiastku, keď úroková sadzba prevýši predom dohodnutú sadzbu (strike). Floor je opakom capu, výplata nastáva ak sadzby klesnú pod hodnotu strike.

Označme  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  ako množinu jednotlivých dátumov výplat capletov a  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  množinu príslušných časových dĺžok takú, že  $t_i$  je rozdiel medzi  $d_i$  a dátumom uskutočnenia obchodu  $t$  vyjadrený v rokoch, kde  $t_0$  je čas, od ktorého realizujeme prvú výplatu (prvá výplata nastáva v čase  $t_1$ ). Ďalej označme  $\tau_i$  rozdiel  $d_i$  a  $d_{i-1}$ , taktiež v rokoch, kde  $i = 1, \dots, n$ . Takže cena

capu v čase  $t < t_0$  so strikom  $K$ , nominálnou hodnotou  $N$  a množinou časových dĺžok  $T$  je daná vzťahom

$$\mathbf{Cap}(t, T, N, K) = N \sum_{i=1}^n [P(t, t_{i-1})\Phi(\sigma_p^i - h_i) - (1 + K\tau_i)P(t, t_i)\Phi(-h_i)], \quad (2.27)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_p^i &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(t_{i-1}-t)}}{2\kappa}} B(t_{i-1}, t_i), \\ h &= \frac{1}{\sigma_p^i} \ln \frac{P(t, t_i)(1 + K\tau_i)}{P(t, t_{i-1})} + \frac{\sigma_p^i}{2}. \end{aligned}$$

## 2.5 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model

Nasledujúci model sa líši od Vašíčkovho modelu len v druhom sčítanci (volatilita), ktorý je pre násobený druhou odmocninou z  $r(t)$ , čo eliminuje podstatnú nevýhodu Vašíčkovho modelu, a to kladnú pravdepodobnosť výskytu záporných sadziieb. Driftový termín zostáva nezmenený, takže okamžitá úroková sadzba sa vracia k dlhodobému priemeru  $\theta$  s rýchlosťou tohto mean-reversion rovnou  $\kappa$ . Proces okamžitej úrokovej sadzby za predpokladu rizikovo-neutrálnej miery sa vyvíja nasledovne:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (2.28)$$

kde  $\kappa, \theta, \sigma$  sú kladné konštanty a  $W(t)$  je Wienerov proces. Zavedenie podmienky  $2\kappa\theta > \sigma^2$  nám zaručuje, že úrokové sadzby  $r$  budú nezáporné, referencia na literatúru [2].

Správanie úrokových sadziieb vychádzajúce z tejto štruktúry má nasledujúce dôležité vlastnosti (viď [2]):

- Zamedzenie záporných úrokových sadziieb.
- Absolútny rozptyl úrokových sadziieb vzrastie, keď úrokové sadzby vzrastú.
- Existuje ustálené rozdelenie pre úrokové sadzby.

Hustota procesu vývoja úrokovej sadzby (2.28) v čase  $T$ , podmienená jej hodnotou v súčasnom čase  $t < T$  je daná vzťahom, ktorú odvodili ako prvý v článku [3]:

$$f(r(T)|r(t)) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}),$$

kde

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}, \quad u = cr(t)e^{-\kappa(T-t)}, \quad v = cr(T), \quad q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1$$

a  $I_q(\cdot)$  je modifikovaná *Besselova funkcia* prvého druhu rádu  $q$ . Náhodná veličina  $2cr(T)$  má necentrálne  $\chi^2$ -rozdelenie  $\chi^2(2q + 2, 2u)$  s  $2q + 2$  stupňami voľnosti a

necentrálnym parametrom  $2u$ . [8]

Potom pre podmienenú strednú hodnotu a rozptyl platí:

$$\begin{aligned} E(r(T)|r(t)) &= r(t)e^{-\kappa(T-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ \text{Var}(r(T)|r(t)) &= r(t)\left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right)(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)}) + \theta\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)(1 - e^{-\kappa(T-t)})^2. \end{aligned}$$

Ak  $\kappa \rightarrow \infty$ , potom stredná hodnota sa blíži k  $\theta$ , ak  $\kappa \rightarrow 0^+$ , potom podmienená stredná hodnota smeruje k súčasnej úrokovej sadzbe.

Ak  $T \rightarrow \infty$ , potom  $r$  má limitné gama rozdelenie so strednou hodnotou rovnou  $\theta$  a rozptylom  $\sigma^2\theta/2\kappa$  (viď [3],[8]).

CIR model taktiež ako vyššie spomínané modely umožňuje explicitné riešenia pre ceny dlhopisov. Model má afinnú časovú štruktúru, takže cena dlhopisu s nulovým kupónom v čase  $t$  so splatnosťou  $T$  má tvar (2.14).

### 2.5.1 Ceny dlhopisov

Proces úrokovej sadzby  $r(t)$  je daný vzťahom

$$dr(t) = \underbrace{(\kappa\theta - \kappa r(t))}_{\mu(t,r)} dt + \underbrace{\sigma\sqrt{r(t)}}_{\sigma(t,r)} dW(t). \quad (2.29)$$

Podľa práce [1] použitím Itôvej formuly a vylúčením princípu arbitráže môžeme odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre ceny dlhopisov

$$\frac{\partial P(t, T, r)}{\partial t} + (\mu(t, r) + \lambda(t, r)\sigma(t, r))\frac{\partial P(t, T, r)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\frac{\partial^2 P(t, T, r)}{\partial r^2} - rP(t, T, r) = 0,$$

kde  $\lambda(t, r)$  je trhovú cenu rizika definovaná vzťahom  $\lambda(t) = \lambda\sqrt{r(t)}$ , pričom  $\lambda$  je konštanta. V našom prípade za predpokladu rizikovo-neutrálnej miery volíme trhovú cenu rizika rovnú 0.

Nahradením parametrov  $\mu$  a  $\sigma$  z nášho modelu, dostaneme rovnicu ceny dlhopisu pre CIR model

$$-rP(t, T, r) + \frac{\partial P(t, T, r)}{\partial t} + (\kappa\theta - \kappa r)\frac{\partial P(t, T, r)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\frac{\partial^2 P(t, T, r)}{\partial r^2} = 0,$$

kde  $0 \leq t < T$  a  $r \geq 0$  s konečnou podmienkou  $P(T, T, r) = 1$ ,  $r \geq 0$ . Táto rovnica má uzavretú formu riešenia. Riešenie nájdeme v tvare (2.14), kde  $A(T, T) = 0$  a  $B(T, T) = 0$ .

Vieme, že

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P\left(\frac{\partial A}{\partial t} - r\frac{\partial B}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial P}{\partial r} = -BP, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = B^2P.$$

Dosadením týchto vzťahov do predchádzajúcej rovnice a po následnom upravení dostaneme

$$\underbrace{rP\left(-1 - \frac{\partial B}{\partial t} + \kappa B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2\right)}_{\text{Riccatiho rovnica}} - P\left(\kappa\theta B - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0.$$

Ďalej vyriešime obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorá je známa ako Riccatiho rovnica

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -1 + \kappa B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2, \quad B(T, T) = 0,$$

a položíme

$$A(t, T) = -\kappa\theta \int_t^T B(u, T) du,$$

kde využitím  $B(T, T) = 0$  obdržíme

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = \kappa\theta B(t, T).$$

Dopracujeme sa k explicitným vyjadreniam  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$ :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{e^{\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T-t)}}{e^{\alpha(T-t)}(\alpha + \frac{1}{2}\kappa) + e^{-\alpha(T-t)}(\alpha - \frac{1}{2}\kappa)} \\ A(t, T) &= \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \log \left[ \frac{\alpha e^{\frac{1}{2}\kappa(T-t)}}{e^{\alpha(T-t)}(\alpha + \frac{1}{2}\kappa) + e^{-\alpha(T-t)}(\alpha - \frac{1}{2}\kappa)} \right], \end{aligned}$$

kde

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}.$$

# Kapitola 3

## Kalibrácia

V nedávnej minulosti sa na finančnom trhu objavili nástroje závislé na úrokovej miere ako napríklad swapy, futures, opcie na dlhopisy a iné, ktorých výplata závisí od úrokovej sadzby. Podstatným problémom je, ako správne oceniť tieto jednotlivé finančné deriváty.

Časová štruktúra úrokových sadzieb je závislosť medzi dobou splatnosti dlhopisu a jeho výnosom. Veľa modelov úrokových sadzieb charakterizujú cenu dlhopisu ako funkciu doby splatnosti, okamžitej úrokovej sadzby a niekoľkých parametrov daného modelu. Napriek tomu, že poznáme niekoľko modelov, žiaden z nich nerieši dokonale problém oceňovania finančných derivátov. Niektorí odborníci kalibrovali modely úrokových sadzieb pomocou trhových cien úrokových derivátov, iní sa pokúšali odhadnúť parametre z histórie a následne oceniť finančné deriváty. Inak povedané, ak máme trh s rôznymi úrokovými opciami, tak ich môžeme kalibrovať prostredníctvom ich trhových cien a získať neznáme parametre modelov úrokových mier zahrnuté v ich cenách. Alebo môžeme určiť parametre modelov vďaka úrokovým sadzbám pozorovaným na trhu. Podľa toho rozdeľujeme metódy kalibrácie do dvoch skupín:

1. Dynamické metódy - odhadnutie parametrov z historických hodnôt úrokových sadzieb
2. Statické metódy - určenie parametrov z aktuálnych trhových dát

Podľa práce [5] môžeme povedať, že dynamické metódy sa používajú predovšetkým na kalibráciu endogénnych modelov. Statické metódy sú vhodné na kalibráciu exogénnych modelov.

V praxi existuje niekoľko konkrétnejších metód používaných na empirické odhadnutie parametrov modelov úrokových sadzieb, ktoré sú založené na zovšeobecnenej momentovej metóde, metóde maximálnej vierohodnosti atď. V tejto práci sa budeme zaoberať druhou spomínanou metódou.

### 3.1 Dynamické metódy kalibrácie

#### 3.1.1 Kalibrácia Vašíčkovho modelu

Metódou maximálnej vierohodnosti odhadneme parametre Vašíčkovho modelu, ktorá požaduje znalosť stavovej premennej [9]. V našom prípade tohto jednofaktorového modelu je to okamžitá úroková sadzba, ktorá bude reprezentovaná

3M EUR sadzbou. Zo znalosti stavovej premennej môžeme odhadnúť parametre modelu metódou maximálnej vierohodnosti, pretože funkciu vierohodnosti dokážeme odvodiť z rovnice pre okamžitú úrokovú sadzbu. Uzavretý tvar funkcie vierohodnosti je známy len v niektorých prípadoch (napr. CIR model implikuje necentrálne  $\chi^2$ -rozdelenie a Vašíčkov model implikuje normálne rozdelenie). Niektoré modely nemajú uzavretý tvar funkcie vierohodnosti. V týchto prípadoch sa používajú aproximácie hustôt, čo implikuje nedostatky optimálnych vlastností odhadu (viď [9]).

Pre prehľadnosť označme  $\alpha = e^{-\kappa(t-s)}$ , kde časová dĺžka medzi  $t$  a  $s$  je rovná jednému pracovnému dňu, čo je približne  $1/250$ . Ak máme k dispozícii  $n + 1$  historických hodnot sadzieb  $r_0, r_1, \dots, r_n$ , potom funkcia vierohodnosti má tvar [9]:

$$\ln L(\kappa, \theta, \sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left( \ln \nu_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu_t^2} \right), \quad (3.1)$$

kde

$$\begin{aligned} \nu_t^2 &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}), \\ \varepsilon_t &= r_t - \theta(1 - \alpha) - \alpha r_{t-1}, \end{aligned}$$

pre diskretný model úrokovej miery:

$$r_t = \alpha r_{t-1} + \theta(1 - \alpha) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \nu_t^2), \quad t = 1, \dots, n$$

ktorý odvodíme integrovaním stochastickej diferenciálnej rovnice (2.2) medzi časovými okamžikmi  $t$  a  $s$ .

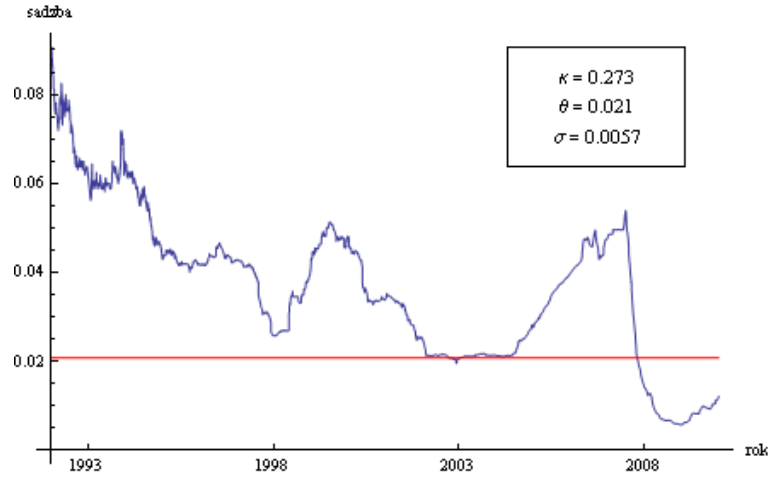
Maximálne vierohodnotné odhady Vašíčkovho modelu pre  $\kappa$ ,  $\theta$  a  $\sigma$  odvodíme z parciálnych derivácií, ktoré položíme rovné nule (viď [2],[5]):

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} &= -\frac{\ln(\hat{\alpha})}{t-s} = -\frac{1}{t-s} \ln \left( \frac{n \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - (\sum_{t=1}^n r_{t-1})^2} \right), \\ \hat{\theta} &= \frac{\sum_{t=1}^n [r_t - \hat{\alpha} r_{t-1}]}{n(1 - \hat{\alpha})}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{2\hat{\kappa} \sum_{t=1}^n [r_t - \hat{\alpha} r_{t-1} - \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha})]^2}{n(1 - e^{-2\hat{\kappa}(t-s)})}}. \end{aligned}$$

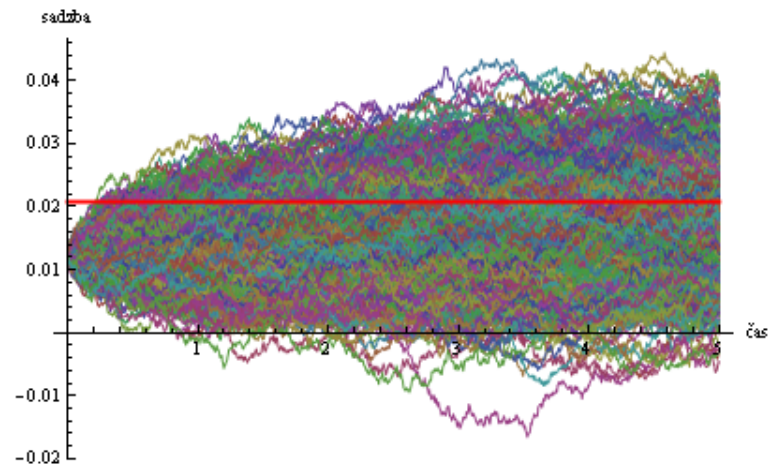
Na obrázku (3.1) vidíme históriu vývoja sadzby EURIBOR 3M za posledných 18 rokov spolu s odhadnutými parametrami Vašíčkovho modelu a vyznačeným dlhodobým priemerom, ku ktorému sú sadzby priťahované.

Na obrázku (3.2) sú nasimulované 3M EUR sadzby Vašíčkovým modelom s odhadnutými parametrami na 5 rokov. Vidíme najväčší nedostatok tohto modelu, a to výskyt záporných sadzieb. Taktiež si môžeme bádať konvergenciu k dlhodobému priemeru  $\theta = 2.1\%$ . Samozrejme tento simulovaný vývoj sadzieb vôbec nemusí odpovedať skutočnému vývoju na trhu.





Obr. 3.1: Vývoj 3M EUR sadzby



Obr. 3.2: 1000 simulácií 3M EUR sadzby k dňu 6.4.2011

### 3.1.2 Kalibrácia CIR modelu

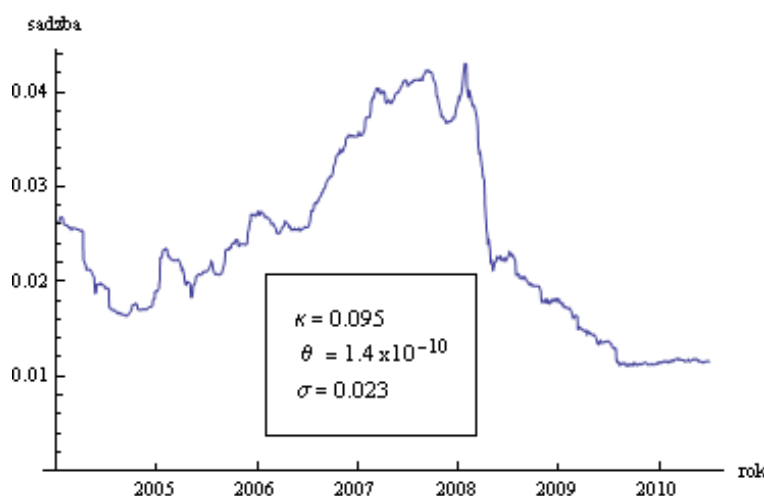
Ďalším zo skupiny rovnovážnych modelov je CIR model, ktorého rovnica (2.1) sa líši od Vašíčkovho len v parametre  $\gamma = 1/2$  (vo Vašíčkovom modeli  $\gamma = 0$ ). Pokúsime sa odhadnúť parametre CIR modelu metódou maximálnej vierohodnosti. Ak predpokladáme, že okamžitá úroková sadzba, ktorú v tomto prípade bude reprezentovať 6M CZK sadzba, vychádza z procesu (2.1), potom funkcia vierohodnosti má rovnaký tvar ako (3.1). S tým rozdielom, že  $\nu_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)})r_{t-1}$ , ostatné označenia a premenné ponecháme nezmenené ako v predchádzajúcom prípade. Ak odhad parametrov  $(\kappa, \theta, \sigma)$  uskutočníme maximalizáciou funkcie vierohodnosti na celej množine  $\mathbb{R}_+^3$ , ide o neobmedzenú maximalizáciu citelka. Potom jej hodnota je:

$$\ln L^u = \max_{\kappa, \theta, \sigma > 0} \ln L(\kappa, \theta, \sigma).$$

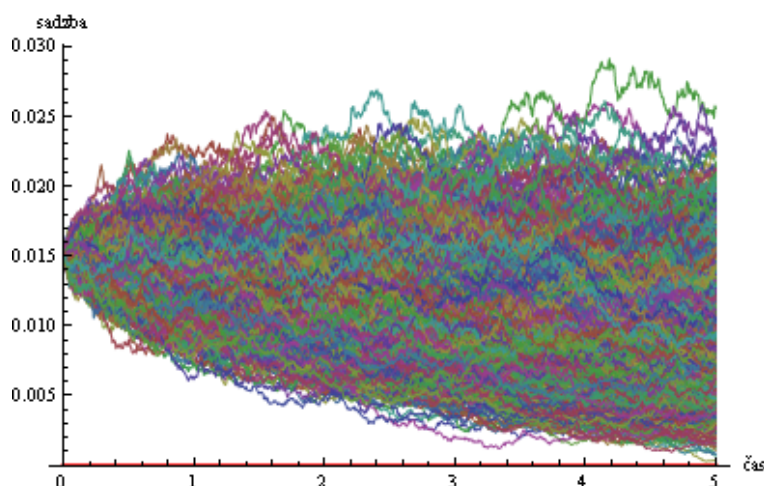
Na spočítanie globálneho maxima funkcie  $\ln L^u$  sme použili software Mathematica.

Na obrázku (3.3) pozorujeme históriu vývoja sadzby PRIBOR 6M za posledných necelých 7 rokov spolu s odhadnutými parametrami CIR modelu. Môžeme si všimnúť, že parameter  $\theta$  vyšiel rádovo  $10^{-10}$ , čo nie je veľmi prijateľná hodnota, ktorá má reprezentovať dlhodobý priemer sadzieb. Jednou z príčin, ktorá sa podieľa na tejto nízkej hodnote je výrazná fluktuácia sadzieb. Prudký nárast na prelome rokov 2007 a 2008 a následný pokles začiatkom roku 2009.

Na obrázku (3.4) sú nasimulované sadzby pomocou odhadnutých parametrov CIR modelu na 5 rokov. Môžeme si všimnúť klesajúcu tendenciu simulovaných sadzieb, čomu nasvedčuje fakt, že sú priťahované k nízkej hodnote dlhodobého priemeru. Taktiež si všimnime nezápornosť sadzieb, ktorá vyplýva z konštrukcie CIR modelu. Aj tu musíme podotknúť, že vývoj v skutočnosti môže byť úplne odlišný.



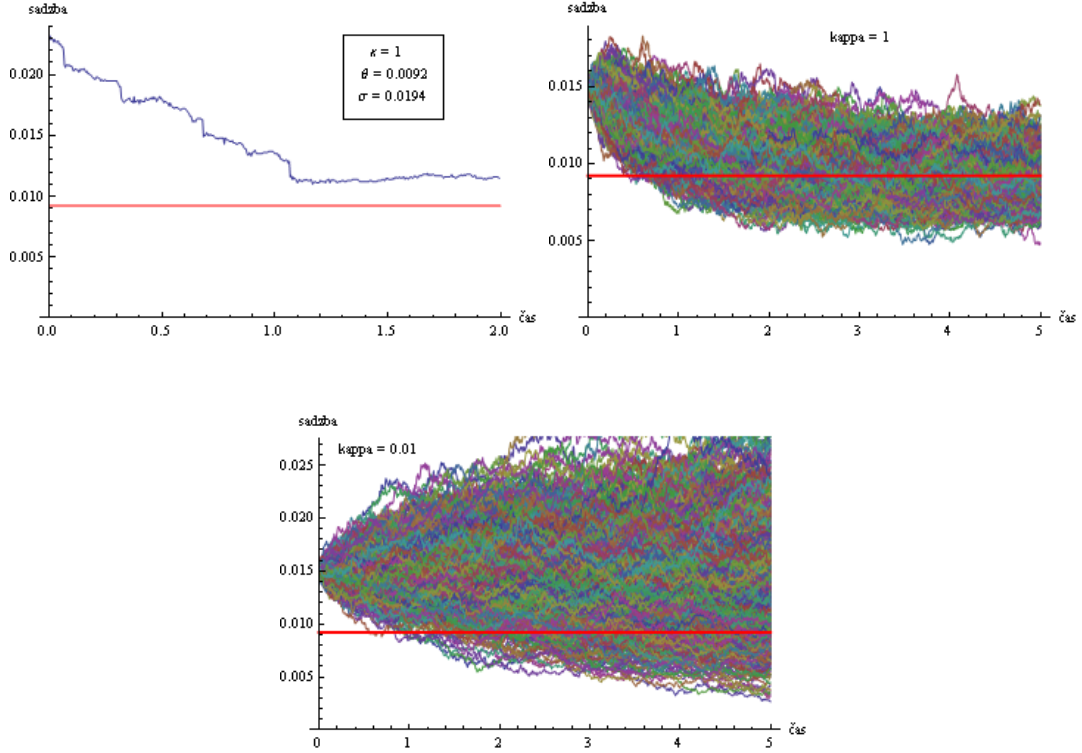
Obr. 3.3: Vývoj 6M CZK sadzby



Obr. 3.4: Simulácia 6M CZK k 6.4.2011

Ak vezmeme vývoj tej istej sadzby 6M CZK za posledné 2 roky, aby sme eliminovali výrazný vplyv fluktuácie sadzieb, obdržíme rozumnejšie hodnoty parametrov CIR modelu. Na nasledujúcich grafoch je červenou farbou vyznačený

očakávaný dlhodobý priemer úrokových sadzieb. Povšimnime si, že hodnota parametra rýchlosti vracania sa k priemeru  $\kappa = 1$  je výrazne väčšia ako v predchádzajúcich prípadoch. Takže simulácie vývoja sadzieb viditeľne kolíšu okolo hodnoty  $\theta = 0.92\%$ , pretože sú oveľa silnejšie priťahované k danej hodnote. Pre ilustráciu položíme  $\kappa = 0.01$ , pri tejto hodnote konvergencia sadzieb k  $\theta$  nie je taká dokonalá.



## 3.2 Statické metódy kalibrácie

### 3.2.1 Kalibrácia Hull-Whiteovho modelu

Exogénne modely, ku ktorým zaraďujeme Hull-Whiteov model sa v praxi väčšinou kalibrujú pomocou statických metód. Ak by sme tieto modely chceli nakalibrovať nejakou dynamickou metódou, vyskytol by sa problém s parametrom  $\theta(t)$ , ktorý už nie je konštantou ale funkciou času. Takže by sme museli do výpočtu zahrnúť históriu forwardových sadzieb.

Kalibráciou týchto modelov chceme získať také hodnoty parametrov, aby sa naše modelované ceny úrokových derivátov čo najviac podobali ich cenám na trhu. Trhovú cenu derivátu spočítame prostredníctvom implikovanej volatility. Parametre daného modelu odhadneme metódou najmenších štvorcov:

$$\min_{\kappa, \sigma} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( P_i^M - P_i^{HW} \right)^2, \quad (3.2)$$

kde  $P_i^M$  je  $i$ -tá trhovú cenu,  $P_i^{HW}$  je  $i$ -tá cena spočítaná Hull-Whiteovým modelom a  $n$  je počet pozorovaní. Za jednotlivé pozorovania berieme do úvahy rôzne hodnoty strikov a k nim príslušné implikované volatility.

Trhovú cenu capletu s nominálnou hodnotou  $N$  a strikom  $K$  za obdobie od času  $t_i$  do času  $t_{i+1}$  spočítame zo vzťahu, ktorý nájdeme v literatúre [4]

$$N\tau_i P(0, t_{i+1})[F_i\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)], \quad (3.3)$$

kde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(F_i/K) - \sigma_i^2 t_i/2}{\sigma_i \sqrt{t_i}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma_i \sqrt{t_i} \end{aligned}$$

a  $F_i$  je forwardová sadzba pre obdobie medzi časmi  $t_i$  a  $t_{i+1}$ ,  $\tau_i$  je príslušná perióda medzi výplatami a  $\sigma_i$  je daná implikovaná volatilita.

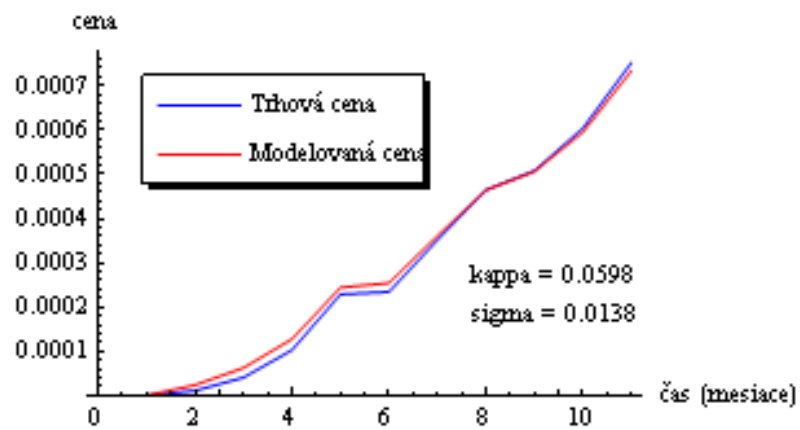
Použitím vzorca (3.3) spočítame trhovú cenu capu k dátumu 6.4.2011, kde za strike  $K$  v európskych sadzbách budeme brať do úvahy trinásť hodnôt v rozmedzí od 1% do 10% a k nim príslušné hodnoty implikovanej volatility. Mesačným nárastom tenoru po dobu jedného roku sa hodnoty implikovanej volatility nemenia. Dáta nám sprostredkovala agentúra Reuters.

Tenor	1 mesiac
Splatnosť	06/05/2011
Strike 1.00	59.10
Strike 1.50	58.30
Strike 2.00	59.70
Strike 2.25	60.60
Strike 2.50	61.40
Strike 3.00	63.10
Strike 3.50	64.50
Strike 4.00	65.80
Strike 4.50	67.00
Strike 5.00	68.10
Strike 6.00	69.90
Strike 7.00	71.40
Strike 10.00	70.40

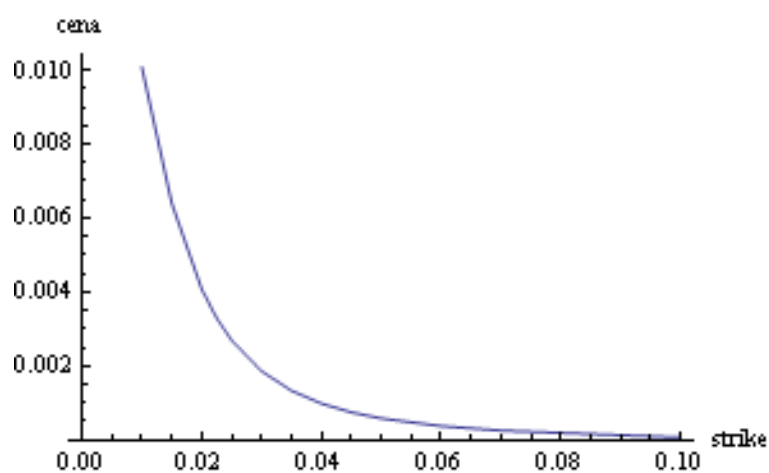
Našu modelovanú cenu HW modelom získame zo vzorca (2.27) a následnou aplikáciou metódy najmenších štvorcov (3.2) dostaneme hodnoty odhadnutých parametrov  $\hat{\kappa} = 0.0598$  a  $\hat{\sigma} = 0.0138$ , pričom druhý parameter reprezentuje volatilitu, ktorá je mierou kolísania úrokových sadzieb takmer o 1.4%.

Na obrázku (3.5) vidíme ceny jednotlivých capletov spočítaných odhadnutými parametrami HW modelu (červená farba) s tenorom 1 mesiac po dobu jedného roku k 6.4.2011 a zafixovanou sadzbou strike  $K = 2.25\%$  s jednotkovou nominálnou hodnotou ako sa líšia v porovnaní s trhovou cenou (modrá farba).

Na grafe (3.6) môžeme ilustrovať pokles trhovej ceny capletu s narastajúcou hodnotou striku spočítanou rovnicou (3.3).



Obr. 3.5: Úroková put opcia k 6.4.2011



Obr. 3.6: Závislosť ceny od striku

# Záver

Volatilita úrokových sadzieb sa stala dôležitou vlastnosťou moderného finančného prostredia. Finančný sprostredkovateľ, akými sú banky a poisťovacie spoločnosti, sú vystavené fluktuáciám úrokových mier, pretože ich aktíva a pasíva sú v korelácii s týmito pohybmi úrokových sadzieb.

V tejto práci sme sa zamerali len na malú skupinu jednofaktorových modelov úrokových sadzieb. Poznáme mnoho ďalších modelov, ktoré sa snažia odstrániť nedostatky svojich predchodcov, ako napríklad výskyt negatívnych sadzieb. V praxi sa viac osvedčili mnohofaktorové modely, ktoré disponujú oveľa lepšími fitovacími vlastnosťami, čo by mohlo byť predmetom ďalšieho štúdia.

Oceňovacie formule odvodené pre spomínané modely stanovujú teoretickú cenu dlhopisov. Kde znova musíme pripomenúť, že tieto modelované ceny sa nemusia zhodovať s trhovými cenami, pretože neexistuje dokonalý model.

Čo sa týka kalibrácie, existuje viacero kalibračných techník, väčšinou komplikovanejšie na implementáciu. Každá z nich má svoje výhody (napr. nepožadovanie normality zmien úrokových sadzieb) a nevýhody (napr. neexistencia maxima funkcie vierohodnosti v niektorých prípadoch). S našimi výsledkami kalibrácie môžeme byť spokojný, pretože sme obdržali celkom „rozumné“ hodnoty.

# Zoznam použitej literatúry

- [1] ANTOL M.: *Analýza jedno a dvojfaktorových modelov derivátov úrokových mier*. Diplomová práca, Bratislava, 2006
- [2] BRIGO D., MERCURIO F.: *Interest Rate Models - Theory and Practise*. Springer Finance, Berlin, 2001
- [3] COX JOHN C., INGERSOLL JONATHAN E., Jr., ROSS STEPHEN A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, 385-408, 1985
- [4] HULL JOHN C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education, New Jersey, 2003
- [5] MYŠKA P.: *Modely úrokových sazieb - teorie a praxe*. Praha, 2008
- [6] MAMON ROGERMAN S.: *Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasicek Model*. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, 8(1), 1-14, 2004
- [7] ROM-POULSEN N.: *Computations in the Hull-White Model*. Kodaň, 2005
- [8] SUTÓRIS I.: *Odhady parametrov modelov časovej štruktúry úrokových mier*. Študentská vedecká konferencia, Bratislava, 2009
- [9] CSAJKOVÁ URBÁNOVÁ A.: *Calibration of term structure models*. Dizertačná práca, Bratislava, 2007
- [10] VASICEK O.: *An Equilibrium characterization of the Term Structure*. *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188, 1977